Concursul Fractal

A Patra Ediție, 8 februarie 2025

Problema 1. O tablă de șah de 5×5 pătrățele are pătrățelul din centru ocupat, adică nicio figură nu poate merge acolo. Alexandru și Marius joacă un joc. Alexandru are regele în colțul din stânga-sus al tablei, iar Marius, în colțul din dreapta-jos. Pe rând, începând cu Alexandru aceștia își mută fiecare propriii regi pe un pătrățel ce nu a fost vizitat anterior de vreunul din jucători și astfel încât cei doi regi nu se află pe pătrățele vecine. Pierde cel ce nu poate face o astfel de mutare când ajunge rândul său. Cine pierde?

Soluție: Este clar că Marius poate merge astfel încât poziția regelui său este simetrică față de centru cu poziția regelui lui Alexandru. După astfel de secvență de mutări, cei doi regi nu se intersectează, căci pătrățelul din mijloc e blocat, astfel cum nu ar merge Alexandru, Marius poate merge astfel încât să nu piardă, deci el câștigă.

Problema 2. Fie în triunghiul ABC A_1, B_1 și C_1 picioarele perpendicularelor duse din A, B și C respectiv pe laturile opuse. Arătați că:

$$AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = BA_1^2 + CB_1^2 + AC_1^2$$

Soluție: Notând lungimile laturilor triunghiului cu a, b și c respectiv. Aplicând de două ori teorema lui Pitagora în triunghiurile BA_1A și CA_1A, avem că $c^2 - A_1B^2 = b^2 - A_1C^2$. Scriind astfel de relații pentru toate cele trei laturi și sumându-le avem relația necesară.

Problema 3. Din numerele naturale de la 1 până la n câteva sunt colorate albastru și câteva roșu. Dacă numerele a și b sunt albastre, numărul ab este fie mai mare decât n, fie roșu. Găsiți numărul maxim posibil de numere albastre.

Soluție: Răspunsul este $n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Pentru a arăta că există cel puțin $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ numere roșii luăm perechile de forma $(x; x^2)$, pentru $x \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. E clar că din aceste perechi de numere cel puțin câte unul este roșu. Iar pentru construcție, colorăm toate numerele mai mari decât $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ cu albastru, și pe toate restul roșu.

Problema 4. Numerele reale nenule distincte a, b și c satisfac: $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}=\frac{a}{c^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}$. Găsiți minimul expresiei:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{a^2}+\frac{(a+b)(b+c)}{b^2}+\frac{(c+b)(a+c)}{c^2}$$

Soluție: Aducând la numitor comun și factorizând $\sum a^3c^2-\sum c^3a^2$ se factorizează ca produsul diferențelor înmulțit cu $ab+bc+ca$, astfel această expresie este zero, deci expresia ce trebuie minimizată este mereu 3.